

Elke Brendel

Logik-Skript 2

Einführung in die Modallogik

Klostermann Rote Reihe

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2021 · Vittorio Klostermann GmbH · Frankfurt am Main

Alle Rechte vorbehalten, insbesondere die des Nachdrucks und der Übersetzung. Ohne Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, dieses Werk oder Teile in einem photomechanischen oder sonstigen Reproduktionsverfahren oder unter Verwendung elektronischer Systeme zu verarbeiten, zu vervielfältigen und zu verbreiten.

Gedruckt auf EOS Werkdruck von Salzer,

alterungsbeständig  ISO 9706 und PEFC-zertifiziert.

Druck und Bindung: Hubert & Co., Göttingen

Printed in Germany

ISSN 1865-7095

ISBN 978-3-465-04528-1

Inhalt

Vorwort	7
I. Was ist Modallogik?	9
I.1 Verschiedene Arten der Notwendigkeit und Möglichkeit	11
I.2 Zusammenhänge zwischen Notwendigkeit und Möglichkeit	16
I.3 Die Modallogik als intensionale Logik	19
II. Modale Junktorenlogik und Semantik möglicher Welten.	23
II.1 Die formale Sprache der modalen Junktorenlogik	23
II.2 Natürliche Sprache und modale Junktorenlogik	27
II.3 Mögliche Welten und Semantik der Modallogik	28
II.4 Wahrheit und Falschheit von Sätzen der Sprache JML	29
II.5 Vorstellbarkeit, mögliche Welten und Widersprüche	35
II.6 Das T-Modell für die modale Junktorenlogik	39
II.7 Die „Paradoxien der notwendigen Implikation“	46
II.8 Das S4-Modell für die modale Junktorenlogik	48
II.9 Das S5-Modell für die modale Junktorenlogik	53
II.10 Das S5-Modell und ontologische Gottesbeweise	57
II.11 Übungen zu Kapitel II	59
III. Ein Kalkül des natürlichen Schließens für die modale Junktorenlogik	63
III.1 Der Kalkül KNS-JMT für die modale Junktorenlogik	63
III.2 Zulässige Schlussregeln in KNS-JMT	72
III.3 Der Kalkül KNS-JMS4 für die modale Junktorenlogik	85
III.4 Der Kalkül KNS-JMS5 für die modale Junktorenlogik	87
III.5 Übungen zu Kapitel III	89
IV. Modale Quantorenlogik und Semantik möglicher Welten ...	91
IV.1 Die formale Sprache der modalen Quantorenlogik	91
IV.2 Natürliche Sprache und modale Quantorenlogik	97
IV.3 Ein Modell für die modale Quantorenlogik	98
IV.4 Wahrheit und Falschheit in der modalen Quantorenlogik	102
IV.5 Logische Folgerung und Gültigkeit	109

IV.6 Die Modelle ME und NE der modalen Quantorenlogik.....	112
IV.7 Die Barcan-Formel	114
IV.8 Existenz als Prädikat.....	121
IV.9 Zur Semantik fiktionaler Objekte	124
IV.10 Zur Semantik widersprüchlicher Objekte.....	137
IV.11 Übungen zu Kapitel IV.....	141
V. Ein Kalkül des natürlichen Schließens für die modale Quantorenlogik	145
V.1 Der Kalkül KNS-QMT für die modale Quantorenlogik.....	146
V.2 Zulässige Schlussregeln in KNS-QMT	154
V.3 Der Kalkül KNS-QMT ^{ME} für die modale Quantorenlogik..	159
V.4 Der Kalkül KNS-QMT ^{NE} für die modale Quantorenlogik..	161
V.5 Übungen zu Kapitel V	163
Anhang: Lösungen zu den Übungen	165
Lösungen zu den Übungen von Kapitel II.....	165
Lösungen zu den Übungen von Kapitel III	167
Lösungen zu den Übungen von Kapitel IV	170
Lösungen zu den Übungen von Kapitel V	172
Literaturverzeichnis.....	175
Symbolverzeichnis.....	179
Stichwortverzeichnis	181
Verzeichnis der zentralen modallogischen Schlussregeln	187

Vorwort

Die Modallogik zählt zu den wichtigsten Zweigen der philosophischen Logik. Sie erforscht die logischen Beziehungen zwischen dem *Wirklichen*, *Möglichen* und *Notwendigen*. Auch weitere zentrale Begriffe der philosophischen Metaphysik, wie *Existenz*, *Identität* und *Essenz*, sind Gegenstand modallogischer Untersuchungen. Die Modallogik liefert ein unentbehrliches Rüstzeug für formale Analysen von Möglichkeits- und Notwendigkeitsaussagen und lehrt, wie diese in logischen Schlussfolgerungen und Argumenten korrekt verwendet werden.

Dieses Buch gibt eine Einführung in die Modallogik, die den Lehrstoff eines einsemestrigen Kurses im Rahmen eines BA- oder MA-Studiums der Philosophie umfasst. Es eignet sich aber auch zum Selbststudium und richtet sich an all diejenigen, die logische Kompetenzen in einem zentralen Gebiet der philosophischen Logik erlangen oder vertiefen möchten.

Grundlegende Kenntnisse der elementaren klassischen Junktoren- und Quantorenlogik vermittelt mein Buch *Logik-Skript 1: Wahrheit und logisches Schließen* (Klostermann-Verlag 2020). Dieser vorliegende Band baut auf den im *Logik-Skript 1* erworbenen Kenntnissen auf und erweitert sie im Bereich der Modallogik. Das *Logik-Skript 2* kann jedoch auch unabhängig vom *Logik-Skript 1* gelesen werden, da alle zentralen Begriffe und Schlussregeln der elementaren klassischen Junktoren- und Quantorenlogik eingeführt und erläutert werden. Es ist allerdings hilfreich, wenn die Leserinnen und Leser dieses Buch bereits über rudimentäres Wissen der klassischen Logik verfügen und mit einem Kalkül des junktoren- und quantorenlogischen Schließens vertraut sind.

Im Rahmen meiner Tätigkeit als Logikdozentin wurde von Seiten der Studierenden häufig der Wunsch nach einer logisch präzisen, aber zugleich auch philosophisch inspirierten Einführung in die Modallogik an mich herangetragen. Man wünschte sich ein modallogisches Lehrbuch, das vor allem auf die Interessen und Logikkenntnisse von Philosophiestudierenden Rücksicht nimmt. Das Lehrbuch sollte sich als Aufbau- und Erweiterungskurs zur elementaren klassischen Logik eignen. Es sollte in die Semantik

der möglichen Welten einführen, mit einem eingängigen Kalkül des natürlichen Schließens für modallogisches Argumentieren arbeiten sowie wichtige philosophische Implikationen und Anwendungen der Modallogik diskutieren. Das vorliegende Buch ist der hoffentlich gelungene Versuch, diesem Wunsch zu entsprechen.

Mein herzlicher Dank gilt Christoph Schamberger für das sorgfältige Korrekturlesen und für die vielen hilfreichen Anregungen zur Verbesserung des Buchmanuskripts. Es ist möglich, wenngleich nicht notwendig, dass dieses Buch dennoch Fehler enthält. Für diese bin ich selbstverständlich ganz alleine verantwortlich.

Bonn, im Dezember 2020

Elke Brendel

I. Was ist Modallogik?

Wenn es aber Wirklichkeitssinn gibt, und niemand wird bezweifeln, daß er seine Daseinsberechtigung hat, dann muß es auch etwas geben, das man Möglichkeitssinn nennen kann.

Wer ihn besitzt, sagt beispielsweise nicht: Hier ist dies oder das geschehen, wird geschehen, muß geschehen; sondern er erfindet: Hier könnte, sollte oder müßte geschehn; und wenn man ihm von irgend etwas erklärt, daß es so sei, wie es sei, dann denkt er: Nun, es könnte wahrscheinlich auch anders sein. (Musil 1978: 16)

Wir Menschen, so beschreibt es Robert Musil in obigem Zitat aus seinem Roman *Der Mann ohne Eigenschaften*, sind mit einem „Möglichkeitssinn“ ausgestattet. Als „Möglichkeitsmenschen“ sind wir gedanklich nicht bloß in der Realität verhaftet. Wir stellen nicht nur fest, was ist. Wir überlegen auch, was sein könnte, was sein muss und was niemals sein kann. Wir beziehen uns in unseren Gedanken und Überlegungen nicht bloß auf das *Wirkliche*, sondern auch auf das *Mögliche*, *Notwendige* und *Unmögliches*. Wir können uns zur Realität auch alternative Weltverläufe vorstellen. Die *aktuelle Welt*, d. h. die wirkliche Welt, in der wir leben, lässt sich als eine von vielen *möglichen Welten* verstehen, wie wir in den folgenden Untersuchungen zur Logik des Möglichen und Notwendigen noch näher sehen werden. So ist es zwar *de facto* der Fall, dass im Jahr 2020 Bayern München Deutscher Fußballmeister der Männer ist und die Welt unter einer Corona-Pandemie leidet. Es ist zudem *de facto* wahr, dass sich auf meinem Schreibtisch derzeit eine Kaffeetasse befindet und dass der Einband dieses Buches rot ist. Hätte es aber nicht auch anders sein können? Jedenfalls kann man sich leicht vorstellen, dass dieses Buch keinen roten, sondern beispielsweise einen blauen Einband hat. Ich kann mir zudem meinen Schreibtisch auch ohne Kaffeetasse vorstellen. Auch wenn es vielleicht manchen Bayern München Fans schwerfällt, so scheint es doch für viele vorstellbar (und für manche sogar wünschenswert) zu sein, dass nicht Bayern München, sondern ein anderer Verein Deutscher Fußballballmeister des Jahres 2020 ist. Ebenso haben wir eine Vorstellung davon, wie es wäre, wenn das Corona-Virus sich nicht weltweit ausgebreitet hätte. In diesen Vorstellun-

gen entwerfen wir gedankliche mögliche Welten, die von der realen Welt mehr oder weniger stark abweichen. Manche Vorstellungen, wie die Vorstellung, dass auf meinem Schreibtisch derzeit keine Kaffeetasse steht oder dieses Buch einen blauen Einband hat, verlangen von unserem Möglichkeitssinn keine besonderen imaginativen Leistungen. Das phantasievolle Entwerfen fiktionaler Erzählwelten fordert da schon eher unseren Möglichkeitssinn heraus.

Auch wenn unsere Vorstellungskraft eine enorme Vielfalt an möglichen Welten erzeugen kann, so scheint sie doch gewissen Grenzen unterworfen zu sein. Dinge, die in bestimmter Hinsicht mit *Notwendigkeit* gelten, lassen sich nämlich nicht so einfach gedanklich manipulieren. Von etwas, das notwendig ist, lässt sich sein Gegenteil nicht als Möglichkeit vorstellen. So sind etwa die Sätze „ $2 + 2 = 4$ “, „Ein Quadrat hat vier Seiten“ oder „Ein Jungeselle ist unverheiratet“ Beispiele für Sätze, die *notwendigerweise wahr* sind. Im Unterschied zu *kontingent wahren* Sätzen, wie „Bayern München ist 2020 Deutscher Fußballmeister der Männer“ oder „Der Einband dieses Buches ist rot“, können sie *nicht* als *möglicherweise falsch* angesehen werden.

Die *Modallogik*, genauer die *alethische Modallogik* (gr. *aletheia* = Wahrheit) untersucht die logischen Beziehungen und Schlussfolgerungen aus *Modalaussagen*, d. h. aus Aussagen, die insbesondere die Begriffe *Möglichkeit* (möglich, möglicherweise) und *Notwendigkeit* (notwendig, notwendigerweise) enthalten. Sie zählt zu einem wichtigen Zweig der *philosophischen Logik*, da sie das korrekte logische Schließen von Aussagen mit philosophisch relevanten Begriffen lehrt. Sie klärt zudem die logischen Beziehungen zwischen den Begriffen der Wirklichkeit, Möglichkeit und Notwendigkeit sowie anderen philosophisch wichtigen Begriffen wie *Existenz*, *Identität* und *Essenz*.

Neben der alethischen Modallogik gibt es noch weitere Modallogiken, die Schlussfolgerungen aus Aussagen untersuchen, die andere philosophisch relevante Begriffe enthalten, z. B. den Begriff des Sollens (deontische Logik) oder den Begriff des Wissens (epistemische Logik). Diese Modallogiken bauen auf der alethischen Modallogik auf. Es würde jedoch den Rahmen des Buches sprengen, auch auf diese philosophischen Logiken einzugehen.

I.1 Verschiedene Arten der Notwendigkeit und Möglichkeit

Bevor die Wahrheitsbedingungen von Modalaussagen sowie das korrekte logische Schließen mit diesen Aussagen im Rahmen der Modallogik untersucht werden, muss vorab geklärt werden, welche Formen von Notwendigkeits- und Möglichkeitsbegriffen in der (alethischen) Modallogik überhaupt analysiert werden sollen. Es gibt nämlich verschiedene Notwendigkeits- und Möglichkeitsbegriffe, die unterschiedliche Arten der Notwendigkeit und Möglichkeit zum Ausdruck bringen.

Die folgenden zehn Sätze sind nicht bloß wahr, sondern auch in gewissen Hinsichten *notwendigerweise wahr*:

1. Wenn Bonn am Rhein liegt, dann liegt Bonn am Rhein.
2. Bonn liegt am Rhein, oder Bonn liegt nicht am Rhein.
3. $7 + 5 = 12$.
4. Ein Quadrat hat vier Seiten.
5. Ein Junggeselle ist unverheiratet.
6. Alle Körper sind ausgedehnt.
7. Im Vakuum fallen alle Körper gleich schnell.
8. Kein Mensch überquert ohne Hilfsmittel vom Erdboden aus mit nur einem Sprung ein Hindernis von fünf Metern.
9. Wasser ist H_2O .
10. Gold ist ein chemisches Element mit der Ordnungszahl 79.

Die Sätze 1 und 2 drücken aussagenlogische *Tautologien* aus (siehe Brendel ²2020, Kap. II.8). Sie sind Einsetzungsinstanzen der logisch stets gültigen Satzschemata „Wenn A , dann A “ bzw. „ A oder nicht- A “ (wobei A für jeden beliebigen Satz steht). Es ist für die Wahrheit der Sätze 1 und 2 daher völlig unerheblich, dass in ihnen von Bonn und dem Rhein die Rede ist. Jeder andere wahre oder falsche Satz, den man für A in die obigen Satzschemata einsetzen würde, hätte ebenfalls zu einem wahren Satz geführt. Die Wahrheit der Sätze 1 und 2 wird alleine durch die logische Struktur dieser Sätze garantiert. Ihre Wahrheit ergibt sich zwangsläufig aus der Bedeutung der logischen Junktoren „wenn, dann“, „oder“ und „nicht“. Die Sätze 1 und 2 sind daher Beispiele für *logisch wahre* Sätze. Nach Auffassung der klassischen Logik gibt es

keine Situation, keine mögliche Welt, in der die Sätze 1 und 2 jemals falsch sein können. Wenn wir diese Sätze verneinen, verstricken wir uns in einen logischen Widerspruch. Derartige Sätze sind daher aufgrund *logischer Notwendigkeit* wahr.

Satz 3 drückt eine *mathematische Notwendigkeit* aus. Seine Wahrheit ergibt sich mit einfachen logischen Schlüssen aus den Axiomen der Arithmetik der natürlichen Zahlen, welche unsere unmittelbaren intuitiven Konzepte der Anzahl und des Addierens zum Ausdruck bringen sollen. Ebenso wie bei den Sätzen 1 und 2 können wir uns auch Satz 3 nicht anders als wahr denken. Wer die Negation dieses Satzes für wahr hält, scheint die in dem Satz vorkommenden arithmetischen Ausdrücke falsch anzuwenden.

Die Sätze 4 und 5 formulieren *begriffliche oder definitorische Wahrheiten*. Der Begriff des Quadrats ist definitorisch so festgelegt, dass ein Quadrat eine geometrische Figur darstellt, die vier gleiche Seiten aufweist. Für die Eigenschaft, ein Junggeselle zu sein, ist es eine notwendige Bedingung, unverheiratet zu sein. Der Begriff des Junggesellen ist gerade so definiert, dass er nur auf Personen zutrifft, die unverheiratet sind. Wer behauptet, es sei möglich, dass ein Quadrat keine vier Seiten hat oder ein Junggeselle verheiratet ist, begeht offenbar einen begrifflichen Fehler. Man kann sich kein Quadrat mit fünf Seiten oder einen verheirateten Junggesellen vorstellen. Stellen wir uns eine geometrische Figur mit fünf Seiten vor, dann ist es unmöglich, dass es sich bei dieser vorgestellten Figur um ein Quadrat handelt. Stellt man sich eine verheiratete Person vor, dann stellt man sich jemanden vor, der in keinem Fall ein Junggeselle sein kann. Die Sätze 4 und 5 drücken daher Wahrheiten aus, die mit *begrifflich-definitorischer Notwendigkeit* gelten.

Satz 6 ist ein Beispiel für einen Satz, den Immanuel Kant als *analytisch wahren* Satz bezeichnet (bzw. als einen Satz, der ein analytisch wahres Urteil formuliert; Kant KrV: A7–10/B10–14). Das (grammatische) Subjekt eines analytisch wahren Satzes ist Kant zufolge untrennbar, und somit mit Notwendigkeit, mit dem (grammatischen) Prädikat verknüpft. Sätze, deren Wahrheit oder Falschheit sich nicht bereits aus der begrifflichen Analyse des Subjekts ergeben, nennt Kant hingegen *synthetisch*. Nach Kants Auffassung muss man Körper nicht erst empirisch untersuchen, um dann im Nachhinein festzustellen, dass alle Körper über eine Ausdehnung verfügen. Für Kant ist im Subjekt *Körper* vielmehr das

Prädikat *Ausdehnung* bereits mitenthalten, und eine begriffliche Analyse von *Körper* fördert daher die analytische Wahrheit von Satz 6 zutage:

In allen Urteilen, worinnen das Verhältnis eines Subjekts zum Prädikat gedacht wird [...], ist dieses Verhältnis auf zweierlei Art möglich. Entweder das Prädikat B gehört zum Subjekt A als etwas, was in diesem Begriffe A (versteckter Weise) enthalten ist; oder B liegt ganz außer dem Begriff A, ob es zwar mit demselben in Verknüpfung steht. Im ersten Fall nenne ich das Urteil *analytisch*, in dem andern *synthetisch*. [...] Z. B. wenn ich sage: alle Körper sind ausgedehnt, so ist dies ein analytisch Urteil. Denn ich darf nicht über den Begriff, den ich mit dem Körper verbinde, hinausgehen, um die Ausdehnung, als mit demselben verknüpft, zu finden, sondern jenen Begriff nur zergliedern, d. i. des Mannigfaltigen, welches ich jederzeit in ihm denke, mir nur bewußt werden, um dieses Prädikat darin anzutreffen; es ist also ein analytisches Urteil. (Kant KrV: A7–10/B10–14)

Analytisch wahre Urteile im Sinne Kants sind auch die Sätze 4 und 5. Auch hier ergibt sich alleine kraft der Bedeutung des jeweiligen Subjekts („Quadrat“ und „Junggeselle“) das Prädikat („hat vier Seiten“ und „ist unverheiratet“) mit Notwendigkeit. Analytisch wahre Sätze drücken somit *begrifflich-definitivische Notwendigkeiten* aus, deren Wahrheit sich *a priori*, d. h. erfahrungsunabhängig, erkennen lässt.

Die Sätze 7 und 8 formulieren ebenfalls Wahrheiten, die nicht bloß aufgrund bestimmter kontingenter Umstände gelten (wie die Wahrheit, dass gerade auf meinem Schreibtisch eine Kaffeetasse steht oder dass der Einband dieses Buches rot ist). Dennoch drücken diese Sätze keine logischen oder begrifflich-definitivischen Notwendigkeiten aus. Es gibt keine logischen Prinzipien, die die Negation der Sätze 7 und 8 als logisch widersprüchlich ausweisen würden. Ohne dass wir dabei einen logischen Widerspruch begehen, können wir uns sowohl vorstellen, dass eine schwere und eine leichtere Kugel im Vakuum unterschiedlich schnell zu Boden fallen, als auch, dass ein Mensch ohne Hilfsmittel über ein Hindernis von fünf Metern Höhe springt. Alleine aus der Definition

des Begriffs des Körpers scheint zudem nicht zu folgen, dass alle Körper im Vakuum gleich schnell fallen, und aus rein begrifflichen Überlegungen lässt sich auch nicht ableiten, dass Menschen ohne Hilfsmittel keine Hindernisse von fünf Metern Höhe mit einem einzigen Sprung überwinden können. Die Sätze 7 und 8 drücken hingegen bestimmte *naturgesetzliche Notwendigkeiten* aus. Die Wahrheit dieser Sätze wird nämlich durch das Bestehen gewisser Naturgesetze verbürgt. Überall dort, wo unsere Naturgesetze gelten, können diese Sätze niemals falsch werden. Die physikalischen Gesetze des freien Falls garantieren, dass der Satz „Im Vakuum fallen alle Körper gleich schnell“ stets wahr ist. Ebenso folgt aufgrund der biologischen Ausstattung des Menschen und bestimmter Gravitationsgesetze, dass selbst die beste Hochspringerin der Welt in Erdnähe niemals ohne Hilfsmittel höher als fünf Meter springen kann (zu naturgesetzlichen Notwendigkeiten vgl. u. a. Schrenk 2017, Kap. 4).

Ähnlich wie bei den Sätzen 7 und 8 wird auch die Wahrheit der Sätze 9 und 10 durch bestimmte Gesetzmäßigkeiten verbürgt, die in der Natur gelten. In der philosophischen Diskussion werden die Sätze 9 und 10 jedoch manchmal als Beispiele für Sätze herangezogen, die eine von der naturgesetzlichen Notwendigkeit zu unterscheidende Form der Notwendigkeit ausdrücken, nämlich eine Form der *metaphysischen Notwendigkeit*. Für Saul Kripke sind Aussagen, die mit metaphysischer Notwendigkeit wahr sind, insbesondere solche, die bestimmten *natürlichen Arten* (wie beispielsweise Wasser oder Gold) *essentielle Strukturen und Eigenschaften* zuschreiben, d. h. innere Strukturen und Eigenschaften, die zu den unumstößlichen Identitätsbedingungen dieser Arten zählen. Dass Wasser die chemische Struktur H_2O aufweist, ist in diesem Sinne ein notwendiges Wesensmerkmal von Wasser. Wenn wir uns eine Welt vorstellen, in der eine Flüssigkeit nicht H_2O ist, dann kann diese Flüssigkeit kein Wasser sein. Ähnliches gilt, so Kripke, auch für die Eigenschaft von Gold, ein chemisches Element mit der Ordnungszahl 79 zu sein. Für Kripke gehört diese Eigenschaft wesentlich zur „Natur von Gold“. Wir können uns daher unmöglich eine Welt denken, in der Gold nicht ein chemisches Element mit der Ordnungszahl 79 ist. Natürlich können wir uns eine Substanz vorstellen, die genauso aussieht wie Gold und diese Eigenschaft nicht besitzt. Die Substanz, die wir uns dabei vorstellen,

kann jedoch, so Kripke, kein Gold sein (siehe Kripke 1981: 143). Wie Kripke hervorhebt, sind im Unterschied etwa zu den begrifflich-definitiven Notwendigkeiten viele metaphysische Notwendigkeiten gerade nicht *a priori* erkennbar. Erst nach langer wissenschaftlicher Forschung stellte sich heraus, dass Wasser H_2O und dass Gold ein chemisches Element mit der Ordnungszahl 79 ist, weil sich in jedem Kern eines Goldatoms 79 Protonen befinden. Notwendigkeit und Apriorizität können somit auseinanderfallen.

Wie die oben skizzierten Begriffe der logischen, mathematischen, begrifflich-definitiven, naturgesetzlichen und metaphysischen Notwendigkeit genau zu spezifizieren sind und wie sie zusammenhängen, ist in der philosophischen Diskussion umstritten. In der Metaphysik der Wissenschaften werden gegenwärtig vor allem Fragen zu naturgesetzlichen und metaphysischen Notwendigkeiten diskutiert. Die in den folgenden Kapiteln entwickelten Modelle und Systeme der Modallogik beschränken sich jedoch auf einen Begriff der Notwendigkeit (und der Möglichkeit), der im Wesentlichen dem Begriff einer *erweiterten logischen Notwendigkeit* (bzw. *Möglichkeit*) entspricht, d. h. einem Notwendigkeitsbegriff, der Formen der oben erwähnten logischen, mathematischen sowie begrifflich-definitiven Notwendigkeit umfasst, wie wir sie in den Sätzen 1 bis 6 kennengelernt haben. Formen der naturgesetzlichen oder metaphysischen Notwendigkeit (bzw. Möglichkeit) sollen dagegen nicht berücksichtigt werden.

Der hier verwendete Begriff der *logischen* Möglichkeit ist also so zu verstehen, dass ein Satz der Form „Es ist möglich, dass A “ (wobei A wieder für irgendeinen beliebigen Satz steht) genau dann wahr ist, wenn die Negation von A keinen logischen, mathematischen oder begrifflich-definitiven Widerspruch impliziert. Es ist dabei völlig unerheblich, welchen Kenntnisstand Sprecherinnen¹ über A besitzen. Dies bedeutet nun auch, dass eine logische Möglichkeitsaussage der Form „Es ist möglich, dass A “ nur dann falsch ist, wenn A eine logische, mathematische oder begrifflich-definitive Falschheit ausdrückt.

¹ Die weibliche Form soll hier wie im Folgenden alle Menschen bzw. Handelnden einschließen.

Wichtig ist es zu betonen, dass die im Folgenden verwendeten Begriffe der *logischen* Notwendigkeit und Möglichkeit nicht immer mit den alltagssprachlichen Verwendungen dieser Begriffe übereinstimmen. Oftmals benutzen wir z. B. den Möglichkeitsbegriff in einem *epistemischen* Sinne, um zum Ausdruck zu bringen, dass nach unserem Kenntnisstand ein bestimmter Sachverhalt nicht ausgeschlossen ist und uns Informationen vorliegen, die das Bestehen des Sachverhaltes als wahrscheinlich ansehen lassen. Nehmen wir beispielsweise an, ich wüsste, dass eine Kollegin oft in einem bestimmten Restaurant zu Mittag isst. Weiterhin sei angenommen, dass mir keine Hinweise darüber vorliegen, dass die Kollegin heute Mittag nicht in dieses Restaurant geht. Wenn ich nun auf die Frage, wo sich denn die Kollegin heute Mittag aufhält, antwortete, dass sie *möglicherweise* in diesem Restaurant ist, würde ich (von meinem Kenntnisstand aus betrachtet) etwas Wahres behaupten. Hätte mich die Kollegin hingegen morgens angerufen und sich mit einer schweren Grippe für den Tag krankgemeldet, dann würde ich mit der Behauptung, die Kollegin sei heute Mittag *möglicherweise* in dem Restaurant, etwas Unkorrektes zum Ausdruck bringen, da mir nun Informationen vorliegen, wonach es äußerst unwahrscheinlich ist, dass die Kollegin heute in dem Restaurant zu Mittag isst.

Im *logischen* Sinne von „möglich“ wäre hingegen auch meine Aussage, dass die Kollegin heute Mittag *möglicherweise* in dem Restaurant ist, durchaus *wahr*, auch wenn mir Informationen vorliegen, die es nahezu ausschließen, dass die Kollegin mittags sich in dem Restaurant aufhält. Dass sie sich dort zu Mittag aufhält, ist nun mal im *logischen* Sinne nicht ausgeschlossen, da dies keinen logischen Widerspruch impliziert.

I.2 Zusammenhänge zwischen Notwendigkeit und Möglichkeit

In den Sprachen der modalen Junktoren- und Quantorenlogik (siehe Kap. II.1 und Kap. IV.1) werden *Notwendigkeit* und *Möglichkeit* als (*einstellige*) *Satzoperatoren* konzipiert. Diese Sprachen enthalten einen *Notwendigkeitsoperator* „ \Box “ sowie einen *Möglichkeitsoperator* „ \Diamond “. Für einen beliebigen Satz A dieser Sprachen sind dann $\Box A$ und $\Diamond A$ ebenfalls Sätze dieser Sprachen, die zum Ausdruck

bringen, dass A notwendigerweise wahr bzw. möglicherweise wahr ist. Zwischen Notwendigkeits- und Möglichkeitsaussagen gibt es folgende offenkundige Verbindung: Ein Satz A ist genau dann *notwendigerweise wahr*, wenn seine Negation unmöglich wahr ist, wenn es also nicht möglich ist, dass A nicht der Fall ist. Analog ist es genau dann *möglicherweise wahr*, dass A , wenn es nicht notwendigerweise wahr ist, dass A nicht der Fall ist. Mit dem Negationsoperator „ \neg “ lässt sich dieser Zusammenhang von Notwendigkeit und Möglichkeit somit folgendermaßen darstellen:

$\Box A$ genau dann, wenn $\neg \Diamond \neg A$,

$\Diamond A$ genau dann, wenn $\neg \Box \neg A$.

Es gibt auch einen Zusammenhang von Notwendigkeit und Wahrheit. Wenn für einen Satz A gilt, dass er notwendigerweise wahr ist, dann ist es auch der Fall, dass A wahr ist. Etwas, das notwendigerweise wahr ist, ist *de facto* wahr:

Wenn $\Box A$, dann A .

Des Weiteren folgt aus der Wahrheit eines Satzes A , dass A dann auch möglicherweise wahr ist:

Wenn A , dann $\Diamond A$.

Die Aktualität, d. h. das Wirkliche, wird somit auch als eine Möglichkeit verstanden. Das Umgekehrte gilt hingegen nicht: Nicht jede Möglichkeit entspricht auch der Wirklichkeit. Aus einer Möglichkeitsaussage $\Diamond A$ folgt somit nicht logisch die Aussage A . $\Diamond A$ kann wahr, A jedoch falsch sein. So ist es zwar logisch möglich, dass der Einband dieses Buches blau ist. Der Satz „Dieses Buch hat einen blauen Einband“ impliziert keinen logischen Widerspruch. Somit ist der Satz „Es ist möglich, dass dieses Buch einen blauen Einband hat“ wahr. Dennoch ist der Satz „Dieses Buch hat einen blauen Einband“ falsch, denn dieses Buch zierte ein roter Einband.

Eine unmittelbare Konsequenz aus den obigen Regeln ist die weitere Regel, dass das Notwendige stets das Mögliche impliziert:

Wenn $\Box A$, dann $\Diamond A$.

Auch hier gilt natürlich nicht die umgekehrte Richtung: Mögliches muss nicht notwendig sein.

Alle bisher genannten Regeln gelten offenbar unabhängig von dem jeweiligen Begriff der Notwendigkeit bzw. Möglichkeit. Andere Regeln, die insbesondere in den folgenden Kapiteln eine Rolle spielen werden, lassen sich nur auf die Begriffe der (im weiteren Sinne) *logischen* Notwendigkeit bzw. Möglichkeit korrekt anwenden. So ist beispielsweise die Regel:

Wenn $\Box A$, dann $\Box \Box A$

für einen Begriff der *naturgesetzlichen* Notwendigkeit *nicht gültig*. Da beispielsweise der Satz „Im Vakuum fallen alle Körper gleich schnell“ aus den Naturgesetzen folgt, gilt er zwar mit naturgesetzlicher Notwendigkeit. Die Naturgesetze machen aber selbst keine Aussage darüber, ob sie mit Notwendigkeit gelten. Daher treffen sie keine Aussage darüber, ob die naturgesetzliche Notwendigkeit des Satzes „Im Vakuum fallen alle Körper gleich schnell“ mit Notwendigkeit gilt (siehe hierzu auch Stuhlmann-Laeisz 2002: 9). Somit folgt nicht, dass es aus naturgesetzlichen Gründen notwendig ist, dass es naturgesetzlich notwendig ist, dass im Vakuum alle Körper gleich schnell fallen.

Anders sieht es hingegen aus, wenn der Notwendigkeitsoperator „ \Box “ im Sinne einer (erweiterten) *logischen* Notwendigkeit verstanden wird. Ein Satz der Form $\Box A$ ist in diesem Sinne genau dann wahr, wenn die Negation von A keinen logischen, mathematischen oder begrifflich-definitiven Widerspruch impliziert (siehe hierzu auch Stuhlmann-Laeisz 2002: 8). Stehe „ p “ für „Bonn liegt am Rhein“, dann lässt sich der Satz „Es ist logisch notwendig, dass, wenn Bonn am Rhein liegt, dann Bonn am Rhein liegt“ durch „ $\Box(p \rightarrow p)$ “ formalisieren. Der Satz „ $\Box(p \rightarrow p)$ “ ist *wahr*, da die Wahrheit von „ $p \rightarrow p$ “ sich alleine aus logischen Regeln ergibt; „ $p \rightarrow p$ “ ist nun mal eine *logische Wahrheit*. Die Wahrheit von „ $\Box(p \rightarrow p)$ “ lässt sich somit selbst wiederum alleine aufgrund von logischen Überlegungen feststellen. Dies bedeutet, dass daher auch der Satz „Es ist notwendig, dass es notwendig ist, dass, wenn Bonn am Rhein liegt, dann Bonn am Rhein liegt“ –

symbolisch „ $\Box\Box(p \rightarrow p)$ “ – *wahr* ist. Die Definition der logischen Notwendigkeit bezieht sich auf beliebige Sätze – und somit auch auf Sätze, die selbst die logische Notwendigkeit von Sätzen ausdrücken.

Ähnliches gilt auch für die folgende Regel:

Wenn $\Diamond A$, dann $\Box\Diamond A$.

Aus einer *naturgesetzlichen* Möglichkeit folgt *nicht*, dass diese Möglichkeit mit *naturgesetzlicher* Notwendigkeit gilt. Ein Satz, der einen Sachverhalt beschreibt, der nicht gegen Naturgesetze verstößt, ist *wahr im Sinne einer naturgesetzlichen Möglichkeit*. In diesem Sinne wäre etwa der Satz „Es ist naturgesetzlich möglich, dass ein Mensch ohne Hilfsmittel über ein Hindernis von zwei Metern springt“ wahr. Die Naturgesetze machen aber wiederum keine Aussage darüber, ob dieser Satz mit Notwendigkeit gilt. Daher dürfen wir nicht schließen, es sei naturgesetzlich notwendig, dass es für einen Menschen naturgesetzlich möglich sei, ohne Hilfsmittel über ein Hindernis von zwei Metern zu springen. Ist hingegen ein Satz A aus *logischen Gründen möglich*, dann bedeutet dies, dass seine Negation keinen logischen Widerspruch impliziert. Dass die Negation eines Satzes keinen logischen Widerspruch impliziert, kann selbst wiederum alleine mit logischen Überlegungen eingesehen werden. Somit gilt die logische Möglichkeit eines Satzes mit logischer Notwendigkeit. Die Regel „Wenn $\Diamond A$, dann $\Box\Diamond A$ “ gilt also für *logische Möglichkeit* und *Notwendigkeit*, nicht aber für *naturgesetzliche Möglichkeit* und *Notwendigkeit*.

I.3 Die Modallogik als intensionale Logik

In sogenannten *extensionalen Logiken* gilt das *Prinzip der Substitution extensionsgleicher Ausdrücke salva veritate*. Dieses Prinzip wird auch als *Extensionalitätsprinzip* bezeichnet. Für Logiken, die diesem Prinzip genügen, gilt, dass in allen ihren Sätzen jedes deskriptive Zeichen durch einen extensionsgleichen Ausdruck ersetzt werden kann, ohne dass sich dadurch der Wahrheitswert der jeweiligen Sätze ändert.