FELIX MÜHLHÖLZER

Braucht die Mathematik eine Grundlegung?

Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*

VITTORIO KLOSTERMANN

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet
über *http://dnb.d-nb.de* abrufbar.

Druck: Wilhelm & Adam, Heusenstamm
Bindung: Litges & Dopf, Heppenheim
Gedruckt auf Alster Werkdruck der Firma Geese, Hamburg,
alterungsbeständig ISO 9706 und PEFC-zertifiziert.
Printed in Germany
ISBN 978-3-465-03667-8

INHALT

I. EINLEITUNG

II. KOMMENTAR

VORWORT

Dieser Kommentar wäre nicht entstanden ohne die langjährige und intensive Zusammenarbeit mit meiner Frau Marianne Mühlhölzer, und deswegen ist er ihr gewidmet. Wir haben seit 1992 über mehrere Jahre, von 1993 bis 1997 auch unterstützt durch Sachbeihilfe der Deutschen Forschungsgemeinschaft[1], Wittgensteins *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* gemeinsam gelesen und diskutiert und dabei einen vorläufigen Kommentar des gesamten Buches erarbeitet. Dieser Kommentar war ein nur vorläufiger, weil uns für allzu viele Passagen noch keine befriedigenden Interpretationen gelangen, und auch, weil wir die umfangreichen Texte aus dem Nachlaß, aus denen dieses Buch mit dem Titel *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* von dessen Herausgebern auf teilweise höchst selektive und eigenwillige Weise zusammengestellt wurde, noch nicht berücksichtigt hatten. In meiner alleinigen weiteren Arbeit an dem Kommentar (nachdem sich meine Frau aus pragmatischen Gründen von der Philosophie ab und der Informatik zugewandt hatte) stellte sich heraus, daß viele unserer ursprünglichen Interpretationsprobleme durch das Einbeziehen des Nachlasses gelöst werden können, und im vorliegenden Kommentar des Teils III der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* ist dies nach meiner Einschätzung bis jetzt am befriedigendsten gelungen.[2] Deswegen übergebe ich diesen Kommentar als ersten der Öffentlichkeit, aber Kommentare anderer Teile sollen folgen.

BGM III[3] kann durchaus kommentiert werden, ohne daß dazu die Kommentare der Teile I und II, oder anderer Teile von BGM, schon vorliegen müßten. W. philosophiert nicht so, daß seine Texte systematisch aufeinander aufbauen würden, und ich werde in der Einleitung

[1] MU 687/3-1 und 3-2.

[2] Dabei wurde ich erneut von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt durch die Finanzierung zweier Forschungssemester in den Jahren 2002-03 (MU 687/4-1).

[3] "BGM" ist die Standard-Kurzbezeichnung für Wittgensteins *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, die ich, wie auch andere gängige Abkürzungen, im folgenden immer verwenden werde; siehe die Liste der Siglen im Literaturverzeichnis. "BGM III" bezeichnet dann den Teil der III der BGM, und entsprechend für die anderen Teile. Oft lasse ich das "BGM" weg, ebenso das §-Zeichen, so daß z.B. "BGM VII § 16" abgekürzt wird als "VII.16". Die einzelnen Abschnitte, aus denen die Paragraphen bestehen, werden mit "a", "b", "c" etc. bezeichnet; der dritte Abschnitt von VII.16 z.B. mit "VII.16c". Weiterhin kürze ich im folgenden den Namen "Wittgenstein" immer als "W." ab.

Genaueres über die Art seines Philosophierens sagen. Aber natürlich hat BGM III seine Voraussetzungen, die ich ebenfalls in der Einleitung ausführlich darlege. Darüber hinaus wird sich in der Einleitung zeigen, daß auch gute inhaltliche Gründe existieren, die Kommentierung von BGM mit Teil III zu beginnen.

BGM III stellt einen Auszug aus dem Manuskriptband MS 122, mit Notizen vom 16.10.1939 bis 3.2.1940, gefolgt von einem Auszug aus der zweiten Hälfte des Manuskriptbandes MS 117 (ab S. 148), mit Notizen vom 3.2. bis 16.6.1940, dar, wobei der Text des ersten Paragraphen von BGM III am 25.10.1939 und derjenige des letzten Paragraphen am 19.3.1940 niedergeschrieben wurde. Dieser Auszug ist sehr lückenhaft, und die von den BGM-Herausgebern gewählte Auswahl erscheint, wie sich im Kommentar zeigen wird, häufig in solchem Maße als fragwürdig, daß ich zwischenzeitlich erwogen hatte, BGM einfach nur noch als Relikt der Vergangenheit zu behandeln und gleich die Manuskriptbände selbst zu kommentieren, die ja seit mehreren Jahren in einer sehr brauchbaren Ausgabe, der sogenannten *Bergen Electronic Edition*, auf CD-ROM vorliegen. Mehrere Gründe sprechen jedoch gegen solch eine Entscheidung.

Der wichtigste Grund liegt darin, daß BGM in der vorliegenden Form über viele Jahre der maßgebliche Text gewesen ist, aus dem man das Bild der Philosophie der Mathematik des späten W. gewonnen hat, und daß sich an dieser herausgehobenen Funktion von BGM wohl auch nichts ändern wird, solange der Nachlaß nicht in einer textkritischen Druckfassung vorliegt. Deswegen erscheint es mir gerechtfertigt, BGM zu kommentieren und damit zum besseren Verständnis *dieses* Textes beizutragen. In dem vorliegenden Kommentar wird der Versuch unternommen, bei der Lektüre jedes einzelnen Paragraphen, ja, falls nötig, jedes einzelnen Satzes, den W. niedergeschrieben hat, Hilfestellung zu geben, und ebenfalls zu den Übergängen und Zusammenhängen zwischen den einzelnen Textabschnitten, über die in der einschlägigen Sekundärliteratur, die typischerweise immer nur diese oder jene isolierte Einzelstelle heranzieht, meistens allzu wenig gesagt wird. Dieser Kommentar möchte sich vor allem daran messen lassen, inwieweit es ihm gelingt, im Falle besonders dunkler oder strittiger Text-Passagen oder -Übergänge zu einem größeren Verständnis, oder zumindest zur Verringerung der Verständnisschwierigkeiten, beizutragen.

Wie sich zeigen wird, muß dazu an vielen Stellen der Nachlaß herangezogen werden, und ich werde die entsprechenden Nachlaß-Passagen stets zitieren und selbst kommentieren – allerdings immer nur so weit, als dies zum Verständnis des Textes der BGM nötig ist. Ein vollständiges

Zitieren und Kommentieren sämtlicher Passagen aus MS 122 und MS 117 (ab S. 148) würde den Kommentar, der auch so schon umfangreich genug ist, allzu sehr aufblähen, und dies ist ein weiterer Grund, warum ich mich auf BGM beschränke. Ein dritter Grund liegt darin, daß auch die Manuskript-Passagen alles andere als gedanklich vollständig sind. Es handelt sich bei ihnen um Notizen von Gedankengängen, die W. relativ ungefiltert Tag für Tag niedergeschrieben hat, ohne sie nachträglich noch einmal kritisch zu überarbeiten. In gewisser Weise kann man deshalb sagen, daß der Auszug in BGM III eben nur *noch* unvollständiger ist, daß aber kein grundsätzlicher Unterschied zwischen den Manuskripten als Ganzen und BGM besteht. Denn auch im Falle der Manuskripte müssen vom Interpreten viele gedankliche Lücken geschlossen und scheinbare oder wirkliche Spannungen bewältigt werden, ohne daß dazu nun weitere Texte W.s Hilfestellung böten. Am Ende muß sich jede Interpretation, ob nur von BGM oder von den Manuskripten selbst, an ihrem eigenen erhellenden Potential messen lassen.

Das wichtigste Ziel dieses Kommentars liegt denn auch darin, den Boden für weitergehende Forschungen zu bereiten, sowohl im Hinblick auf die Spätphilosophie W.s selbst, als auch auf eine Philosophie der Mathematik, die, wenn man so will, im Geiste W.s fortgeführt wird. Zwar verbietet W.s unberechenbare Originalität jeden Versuch einer Imitation seines Vorgehens, aber es gibt meines Erachtens hinreichend viele Ansätze in seiner Philosophie, die von anderen aufgegriffen und weitergeführt werden können. Vor allem darauf auch wird der vorliegende Kommentar ein Auge haben.

Vor dem eigentlichen Kommentar findet sich eine lange, in einzelne Kapitel unterteilte Einleitung, die den Zweck verfolgt, auf allgemeine Weise in die Philosophie der Mathematik des späten W. einzuführen und möglichen Mißverständnissen vorzubeugen. Der Kommentar selbst wurde ebenfalls in einzelne, mit neuer Numerierung beginnende Kapitel eingeteilt, um W.s Überlegungen in BGM III eine gewisse Gliederung zu geben. Die Betonung liegt hierbei auf dem Wort "geben", denn man kann schwerlich sagen, daß diese Überlegungen von sich aus solch eine Gliederung aufwiesen. Bei BGM III handelt es sich um Notizen, in denen sich W. dem Fluß seiner Gedanken und Einfälle überlassen hat, ohne daß er selbst sie in eine systematische Ordnung zu zwingen versuchte. Trotzdem läßt dieser Fluß eine thematische Gliederung zu, wie sie sich in meiner Kapitel-Unterteilung niederschlägt. Jedes Kapitel des Kommentars beginnt seinerseits mit einer kurzen Einleitung in die nachfolgend behandelten Paragraphen, womit weniger eine Zusammenfassung dieser Paragraphen intendiert ist, als vielmehr eine Einstimmung.

W.s Überlegungen sind zu komplex und auch zu tentativ, als daß wirkliche Zusammenfassungen möglich wären.

Die Arbeit an diesem Kommentar wurde, neben der schon erwähnten Unterstützung durch meine Frau und die Deutsche Forschungsgemeinschaft, durch Gespräche oder Korrespondenz mit folgenden Personen gefördert: Wolfgang Carl, Juliet Floyd, Simon Friederich, Peter Hacker, Volker Halbach, Wilfried Keller, Andreas Kemmerling, Wolfgang Kienzler, Tim Kraft, Saul Kripke, Godehard Link, Mathieu Marion, Hilary Putnam, Adolf Rami, Norbert Schappacher, Joachim Schulte, Christian Tapp, Anja Weiberg und den Teilnehmerinnen und Teilnehmern an meinen Pro-, Haupt- und Oberseminaren über W.s Philosophie. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt. Besonderen Dank schulde ich Simon Friederich, Wilfried Keller, Andreas Kemmerling und Joachim Schulte, die einzelne noch vorläufige Teile dieses Kommentars gründlich gelesen und mit sehr hilfreichen Bemerkungen versehen haben.

FELIX MÜHLHÖLZER

Göttingen
17. Dezember 2009

I. EINLEITUNG

1. "GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK"

Wittgensteins *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* tragen einen erklärungsbedürftigen Titel, denn für die Philosophie des späten W., die sich in ihnen niederschlägt, ist kaum etwas charakteristischer als die Auffassung, daß die Mathematik gerade keiner Grundlegung bedarf,[1] eine Auffassung, von der das diesem Kommentar vorangestellten Motto, der § 16 aus BGM VII, Zeugnis gibt. Andererseits benutzt W. selbst immer wieder den Ausdruck "Grundlagen der Mathematik", bzw. den entsprechenden englischen: "foundations of mathematics", um damit das Thema seiner Überlegungen anzugeben; am auffallendsten im Vorwort der *Philosophischen Untersuchungen*, wo es heißt, die Untersuchungen beträfen viele Gegenstände, darunter auch "die Grundlagen der Mathematik", obwohl *dieser* Gegenstand in der Folge dann so gut wie gar nicht behandelt wird. Letzteres ist anders im Falle des *Big Typescript*, in dem W. ausgedehnte Überlegungen zur Mathematik unter die Kapitelüberschrift "Grundlagen der Mathematik" stellt (BT, S. 529), und es ist ebenfalls anders bei einem Vortrag, den W. im Mai 1930 vor der *Trinity Mathematical Society* hielt und der unter dem Titel "The Foundations of Mathematics" angekündigt war[2]. Vermutlich hießen so auch W.s Vorlesungen über Mathematik vom Frühjahr 1939, die von Cora Diamond als Buch mit dem Titel *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics* herausgegeben wurden, einem Titel, der auf jeden Fall sachlich gerechtfertigt ist, denn die Vorlesungen beginnen mit dem Satz: "I am proposing to talk about the foundations of mathematics" (LFM, S. 13; "Ich schlage vor, daß wir über die Grundlagen der Mathematik sprechen", in der deutschen Übersetzung von Joachim Schulte, VGM, S. 13). Und schließlich gibt es das berühmte Ende des sogenannten Teils II der *Philosophischen Untersuchungen*, wo W. schreibt:

> Es ist für die Mathematik eine Untersuchung möglich ganz analog unserer Untersuchung der Psychologie. Sie ist ebensowenig eine *mathematische* wie die andere eine psychologische. In ihr wird *nicht* gerechnet, sie ist also, z.B., nicht Logistik. Sie könnte den Namen einer Untersuchung der ›Grundlagen der Mathematik‹ verdienen.

[1] Diese Irritation wird auch in Schulte 2005, S. 101f., zum Ausdruck gebracht.
[2] Siehe die Informationen in Klagge/Nordmann 2003, S. 362 und 373f.

Wie paßt die Aussage in VII.16 zu diesen anderen Äußerungen?

Man könnte denken, daß W. hier doch schon verbal einen Unterschied angedeutet hat, indem er in VII.16 das Wort "Grundlegung" benutzt, das an ein nachträgliches Schaffen von Grundlagen der Mathematik denken läßt, während das Wort "Grundlagen" eher auf schon bestehende Grundlagen verweist. Aber man sollte sich nicht darauf verlassen, daß W.s Sprachgebrauch in dieser Weise systematisch verläßlich ist[3], und es ist ratsam, sich die Verwendungskontexte anzuschauen, um Klarheit darüber zu gewinnen, was W. jeweils im Sinn hat.

In VII.16 hat W. die *logizistischen* Grundlegungsversuche Freges und Russells vor Augen, und die weist er dort zurück. Sie stellen für ihn lediglich ein weiteres, neues Stück Mathematik dar, aber keine Grundlegung der Mathematik. Solange die Fregeschen oder Russellschen Formalismen nicht als Grundlegung der Mathematik auftreten, nimmt W. sie als legitimen Teil der Mathematik durchaus hin, jedenfalls dann, wenn sie von den Mathematikern selbst als respektabel behandelt werden, denn er hält es, wie er zu Beginn der Vorlesung vom Frühjahr 1939 betont, für "äußerst wichtig, den Mathematikern nicht in die Quere zu geraten" (VGM, S. 13). W. geht kurz darauf sogar so weit zu behaupten, daß er von der Russellschen Grundlegung nichts wüßte:

> Man könnte auch auf den Gedanken kommen, daß ich Vorlesungen über einen bestimmten Zweig der Mathematik halte, der »Grundlagen der Mathematik« heißt. Es gibt einen solchen Zweig, und er wird in *Principia Mathematica* etc. behandelt. Hierüber werde ich in meinen Vorlesungen nicht sprechen. Ich weiß nichts darüber – ich kenne praktisch nur den ersten Band der *Principia Mathematica*. (VGM, S. 14)

Dieses "Ich weiß nichts darüber" ist jedoch eine maßlose Übertreibung. W. weiß immerhin so viel, um zeigen zu können, oder um sich zuzutrauen, zeigen zu können, daß das in Whitehead/Russells *Principia Mathematica* präsentierte Stück Mathematik *nicht* zur Grundlegung der Mathematik taugt. Genau dieser Nachweis ist das Ziel von BGM III.

Was aber hat W. im Sinn, wenn er seine eigenen Überlegungen als solche *über* die 'Grundlagen' der Mathematik deklariert? Vor allem durch das Vorkommnis dieses Ausdrucks im Vorwort und am Ende des Teils II der PU, aber auch durch PU § 129, wo W. Alltägliches zu den "eigentlichen Grundlagen [menschlicher] Forschung" zählt, wird der Gedanke

[3] In Elizabeth Anscombes englischer Übersetzung fällt dieser verbale Unterschied sowieso weg: sowohl "Grundlegung" als auch "Grundlage" werden als "foundation" übersetzt. Der Beginn von VII.16 zum Beispiel lautet in RFM folgendermaßen: "What does mathematics need a foundation for?".

nahegelegt, daß W. mit den 'Grundlagen der Mathematik', im Geist seiner Spätphilosophie, unseren charakteristischen *Gebrauch* mathematischer Symbolismen meint, also, in seiner Terminologie gesprochen, deren 'Grammatik'. In diesem Sinn verwendet er das Wort "Grundlagen" tatsächlich manchmal im *Big Typescript*; etwa in der folgenden aufschlußreichen Passage:

> Die Zahl ist durchaus kein »grundlegender mathematischer Begriff«. Es gibt so viele Kalküle/Rechnungen/, in denen von Zahlen nicht die Rede ist.
>
> Und was die Arithmetik betrifft, so ist es mehr oder weniger willkürlich, was wir noch Zahlen nennen wollen. Und im Übrigen ist der Kalkül – z.B. – der Kardinalzahlen zu beschreiben, d.h. seine Regeln sind anzugeben, und damit sind die Grundlagen der Arithmetik gegeben./und damit ist die Arithmetik begründet./und damit ist der Arithmetik der Grund gelegt.//
>
> Lehre sie uns, dann hast Du sie begründet. (BT, S. 540)

Diese 'Angabe von Regeln' wird von W. in seiner Spätphilosophie unter den Ausdruck "Klarlegung der Grammatik" subsumiert, und so fügt W. denn auch in VII.16, nachdem er die Notwendigkeit einer Grundlegung bestritten hat, sofort hinzu: "Wohl aber bedürfen die mathematischen [...] Sätze [...] eine Klarlegung ihrer Grammatik." Diese Klarlegung zielt nicht auf eine Grundlegung im Sinne einer Reduktion der bestehenden mathematischen Formalismen auf einen logischen oder sonstwie nachträglich hinzugedachten Formalismus ab, wie im Falle der Fregeschen oder Russellschen Systeme, sondern auf eine *übersichtliche Darstellung* des tatsächlichen Gebrauchs jener Formalismen. So charakterisiert W. in PU § 122 insgesamt sein philosophisches Vorgehen: "Der Begriff der übersichtlichen Darstellung ist für uns [d.h.: für Wittgenstein (F.M.)] von grundlegender Bedeutung. Er bezeichnet unsere Darstellungsform, die Art, wie wir die Dinge sehen."[4] Und man könnte nun im tatsächlichen mathematischen Symbolgebrauch die eigentlichen 'Grundlagen' der Mathematik sehen wollen, eben Grundlagen im Sinne der W.schen Spätphilosophie. Wenn W.s Schüler Norman Malcolm, der W.s Vorlesungen des Frühjahrs 1939 besucht hatte, von ihnen sagt, sie hätten von den "*philosophical* foundations of mathematics" gehandelt (Malcolm 1984, S. 23; meine Hervorhebung), so könnte man diese "philosophical foundations" gerade im soeben erläuterten Sinn deuten wollen: daß damit die 'Grammatik' der mathematischen Sätze gemeint sei und nicht logizistische oder ähnliche Reduktionen.

[4] Gründliche Erörterungen dieses Begriffs der übersichtlichen Darstellung, auf den später noch ein wenig genauer eingegangen wird, finden sich in Hacker 2004 und Baker/Hacker 2005a, Kap. XV.

Diese Interpretation würde dann auch dem Buch-Titel *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* einen guten Sinn geben: W.s Bemerkungen handelten eben vor allem von unserem Gebrauch mathematischer Symbole, und genau dies zeichnet sie ja tatsächlich aus. Mir scheint jedoch, daß W. mit dem Ausdruck "foundations of mathematics", oder dem deutschen Pendant "Grundlagen der Mathematik", nur in seltenen Fällen *darauf* abzielte. Weder das Vorwort der PU noch das Ende von PU II sollte in dieser Weise gelesen werden. Das Vorwort gibt sowieso keine Auskunft darüber, weil sich in den PU dann die angekündigten Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik gar nicht finden[5], und am Ende von PU II setzt W. den Ausdruck "Grundlagen der Mathematik" in Anführungszeichen, was von vornherein nicht dafür spricht, daß es ihm hier um Grundlagen in *seinem* Sinn geht. Vielmehr verwendet er diesen Ausdruck im Kontext einer Klage über die Begriffsverwirrungen in der Psychologie, was den Gedanken nahelegt, daß er mit ihm nun eben die Begriffsverwirrungen bei mathematischen Grundlegungsversuchen gemeint haben dürfte. Am ehesten wäre noch PU § 129 ein Indiz, wo ganz allgemein Alltägliches, und darunter eben unser alltäglicher Sprachgebrauch, als "Grundlage der Forschung" bezeichnet wird, aber es erscheint mir nicht selbstverständlich, daß W. "Grundlage der Mathematik" als Spezialfall von "Grundlage der Forschung" begreift.[6] Wenn ich es richtig sehe, hat der Ausdruck "Grundlage der Mathematik"

[5] Das Vorwort der PU enthält diesen Hinweis auf die Mathematik, weil W. ursprünglich vorgehabt hatte, seine Überlegungen zur Mathematik in die PU einfließen zu lassen. Vermutlich hat er einfach vergessen, das Vorwort entsprechend abzuändern, als er sein Vorhaben später verwarf.

[6] Ich denke, daß es sich nicht lohnt, das Vorkommnis des Ausdrucks "Grundlagen der Mathematik" in den PU wirklich sorgfältig und in allem Ernst kommentieren zu wollen, zumal sich aus einem solchen Versuch weitere, vermutlich wenig fruchtbare Komplikationen ergäben, etwa wenn man auf S. 36v des im Jahr 1949, also mehrere Jahre nach Niederschrift des PU-Vorworts, verfaßten MS 169 folgendes liest: "Ich will die Betrachtung über Mathematik, die diesen [Variante: "meinen"] Philosophischen Untersuchungen angehören, »Anfänge der Mathematik« nennen." Verwirrend hieran ist nicht nur, daß diese Passage den Eindruck erweckt, W. hätte auch noch im Jahr 1949 daran gedacht, in die PU Betrachtungen über Mathematik aufzunehmen, sondern auch, daß nun der Ausdruck "Grundlagen der Mathematik" durch "Anfänge der Mathematik" ersetzt wird, der doch, anders als "Grundlagen der Mathematik", ganz eindeutig etwas Mathematisches zu bezeichnen scheint und nichts, das der Philosophie der Mathematik angehört. Natürlich könnte man an dieser Stelle nach passenden, und vielleicht auch nicht allzu fernliegenden, Interpretationen in diesem Dschungel suchen, aber mir erscheint dies, wie gesagt, wenig lohnend. Es gibt wichtigere Passagen bei W., die nach Interpretationen verlangen.

in den nach dem *Big Typescript* verfaßten Texten W.s nur dann einen wirklich klaren Sinn, wenn er im Kontext von Untersuchungen zu logizistischen und ähnlichen Grundlegungen verwendet wird, die W. aber, wie gesagt, gerade ablehnt. Unter diesem Blickwinkel müßte man sagen, daß BGM einen unangemessen Titel trägt, da die dortigen Betrachtungen, wenn man einmal von BGM III absieht, keineswegs auf Kontexte eingeschränkt sind, die Grundlegungen thematisieren.

Wie aber ist dann, wenn er auf Grundlegungen betreffende Kontexte, und speziell diejenigen der Logizisten, zugeschnitten sein soll, der erste Satz von VGM zu deuten, in dem W. sagt, er wolle "über die Grundlagen der Mathematik sprechen"? – Schauen wir uns an, was genau man unter soch einer Grundlegung versteht. Rudolf Carnap gibt im Hinblick auf den Logizismus in seinem Vortrag "Die logizistische Grundlegung der Mathematik" aus dem Jahr 1930 folgende Auskunft:

> Als "*Logizismus*" wird die Auffassung bezeichnet, daß die Mathematik auf Logik zurückführbar, also nichts anderes als ein Teil der Logik sei. Diese Auffassung ist von FREGE (1884) zum erstenmal vertreten worden. Die englischen Mathematiker A. N. WHITEHEAD und B. RUSSELL haben in dem großen Werk "Principia Mathematica" einen systematischen Aufbau der Logik und der aus ihr entwickelten Mathematik gegeben. Wir wollen die These des Logizismus in zwei Teilthesen aufspalten [...]: 1. die mathematischen *Begriffe* sind aus den logischen Begriffen ableitbar, und zwar durch explizite Definitionen; 2. die mathematischen *Sätze* sind aus den logischen Grundgesetzen ableitbar, und zwar durch rein logische Deduktionen." (Carnap 1931, S. 91f.)

Im Falle solcher Rückführungen ist es sehr wichtig, deren rein mathematischen Kern von den darüber hinausgehenden erkenntnistheoretischen, semantischen oder metaphysischen Ansprüchen, die mit ihnen normalerweise einhergehen, klar zu unterscheiden. Das rein Mathematische liegt darin, daß sich aus Begriffen, die man (mit welchem Recht auch immer) als "logische" deklariert, die mathematischen Begriffe, oder genauer: passende Surrogate der mathematischen Begriffe, tatsächlich durch explizite Definitionen gewinnen lassen; und daß sich aus Grundsätzen, die man ebenfalls (mit welchem Recht auch immer) als "logische" deklariert, mit Hilfe der genannten Definitionen die mathematischen Sätze, oder passende Surrogate der mathematischen Sätze, durch 'rein logische Deduktionen' (in einem zuvor hinreichend geklärten Sinn dieses Begriffs) ableiten lassen. Daß dieser rein mathematische Kern logizistischer Grundlegungen in Ordnung ist, wird von W. unterstellt. Seine Kritik richtet sich keinesfalls darauf, und deswegen kann er auch, wie schon zitiert, ohne mit der Wimper zu zucken über *Principia Mathematica* sagen: "Ich weiß nichts darüber" (VGM, S. 14). Was W. mit dieser Äußerung meint, sind die Details der rein mathematischen Durchführung der *Principia Mathematica*, über die er insofern nichts wissen muß, als er ihre Richtigkeit den Mathematikern einfach glaubt. Weiterhin fällt ihm dieser Glaube aber auch gar nicht schwer, denn die entscheidenden mathematischen Ideen, die jener Durchführung zugrunde liegen und sie sozusagen steuern, sind relativ einfach, und mit ihnen war W. natürlich vertraut.

In Kap. 1 seines Buches *Mathematical Knowledge* unterstellt Mark Steiner, W. hätte in BGM III die These vertreten, unser normales Rechnen im Dezimalsystem ließe sich im logizistischen System Russells und in ähnlichen Systemen nicht auf ein entsprechendes formales Pendant zurückführen, und Steiner gibt dann tatsächlich, um diese angebliche These zu widerlegen, im Detail eine solche mathematische Rückführung an (Steiner 1975, S. 41-54). Aber die Mathematik, die er dabei vorführt, ist, wenn man nur ein wenig von der Sache versteht, gänzlich trivial, und W. hatte nicht die geringsten Zweifel an *diesen* Dingen. Wenn W., wie schon zitiert, zu Beginn von VGM sagt, er wolle den Mathematikern nicht in die Quere kommen, schließt er unmittelbar folgende Erläuterung an: "Ich darf keine Rechnung hernehmen und sagen: »Dies kommt heraus, nicht das, was Turing behauptet.« Sollte es doch jemals dazu kommen, so würde es nichts mit den Grundlagen der Mathematik zu tun haben."[7] Diese Äußerung, mit entsprechenden Varianten, ist für Steiners Deutung relevant. W. sagt nicht, wie Steiner unterstellt, »Bei den logizistischen Rechnungen, d.h. Ableitungen, kommt dies und jenes heraus, jedoch nicht unser normaler Dezimalkalkül«; W.s Kritik richtet sich in BGM III vielmehr auf die über jenen mathematischen Kern hinausgehenden Ansprüche solcher Grundlegungen.

Es sind nun genau diese Ansprüche, die W. im Sinn hat, wenn er in der soeben zitierten Passage, und ebenfalls schon im ersten Satz seiner Vorlesungen, von den 'Grundlagen der Mathematik' spricht. Nach seiner Auffassung kann man den eigentlich mathematischen Kern der grundlegenden Systeme von deren Ansprüchen weitgehend abkoppeln, und *letztere* sind es, die er der philosophischen Kritik unterzieht – sowohl in VGM als auch in BGM III. Die im Frühjahr 1939 gehaltenen Vorlesungen haben nämlich den Charakter vorbereitender Überlegungen zu den dann von Oktober 1939 bis März 1940 niedergeschriebenen Notizen, die BGM III ausmachen. Beide Texte, VGM und BGM III, handeln von den 'Grundlagen' der Mathematik im Sinne der über das rein Mathematische hinausgehenden Ansprüche des Logizismus. In VGM drückt W., unmittelbar nach der Passage, in der er seine Ignoranz der *Principia Ma-*

[7] VGM, S. 13. – Von Turing ist hier die Rede, weil Turing persönlich in W.s Vorlesung anwesend war. Natürlich hätte W. auch Russell nennen können.

thematica kundtut, seine Intentionen auf folgende Weise aus: "Ich werde über das Wort »Grundlagen«, wie es in dem Ausdruck »Grundlagen der Mathematik« vorkommt, sprechen. Dieses Wort ist von größter Wichtigkeit und einer der Ausdrücke, mit denen wir uns hauptsächlich beschäftigen werden." (VGM, S. 14f.) Ich interpretiere diese Aussage so, daß W. genau jenes *Reden* über die 'Grundlagen' der Mathematik unter die Lupe nehmen möchte, mit dem sich die Logizisten vom eigentlich mathematischen Kern ihrer Systeme entfernen. Es ist dieses Reden, dieses Verwenden des Wortes "Grundlagen", auf das sich W.s Kritik richtet.

Deswegen steht auch im allerletzten, beim ersten Hören sehr dramatisch klingenden Paragraphen von BGM III das Wort "Grundlagen" in Anführungszeichen (so wie auch am Ende von PU II):

90. Die Rolle des Verrechnens habe ich noch nicht klar gemacht. Die Rolle des Satzes: »Ich muß mich verrechnet haben«. Sie ist eigentlich der Schlüssel zum Verständnis der ›Grundlagen‹ der Mathematik.

Diese Anführungszeichen sollen darauf hinweisen, daß W. hier die 'Grundlagen' im Sinne der Logizisten meint, die er für nur vermeintliche Grundlagen hält. Wie sich bei der nachfolgenden, ausführlichen Kommentierung zeigen wird, muß dieser Paragraph im Kontext der W.schen Kritik an logizistischen und ähnlichen Grundlagen gelesen werden. Er handelt keineswegs von W.s eigener Sicht der Mathematik, die weniger eine Grundlegung der Mathematik, als eben vielmehr, wie in VII.16 gesagt, eine Klarlegung der Grammatik mathematischer Sätze anstrebt, also unserer tatsächlichen, charakteristischen Verwendung des mathematischen Symbolismus. Es wäre maßlos übertrieben, wollte man zum Verständnis dieser Verwendung die Rolle des Verrechnens als "Schlüssel" bezeichnen, ob nun 'eigentlich' oder nicht, zumal W. vermutlich sowieso überhaupt keine Schlüssel für unsere Symbolverwendungen anbieten wollte.

Aus dieser Perspektive ergibt sich eine gute inhaltliche Begründung dafür, das Kommentieren von BGM mit Teil III beginnen zu lassen: In diesem Teil wird die Grundlegungsfixiertheit in der Art logizistischer Reduktionen zurückgewiesen und damit der Rücken frei gemacht für die nach W. eigentlich wichtigen Untersuchungen, die das Klarlegen der tatsächlichen mathematischen Praxis betreffen! Und so, wie von W. in III.90 das Wort "Grundlagen" in Anführungszeichen gesetzt wurde, könnte dies in vielen Fällen auch beim Wort "Grundlegung" geschehen, und ich selbst verwende dieses Wort im folgenden nicht als Erfolgswort, sondern nur im Sinne von "beabsichtigte Grundlegung". BGM III behandelt dann die Frage, ob diese Absicht erreicht wird.

Interessanterweise kann sich diese Absicht auf ganz verschiedene Ziele richten. Es gibt erstaunlich viele verschiedenartige Ansprüche, die mit mathematischen Grundlegungen einhergehen können, und entsprechend viele verschiedene mögliche Versionen entsprechender Programme. So wird z.B. Carnaps minimalistische Charakterisierung des Logizismus, die ich oben zitiert habe, der tatsächlichen Vielfalt logizistischer Ideen keinesfalls gerecht (was sie allerdings auch nicht wollte). Folgende lassen sich nennen: daß die logizistischen Definitionen die 'eigentliche oder wahre Bedeutung' unserer mathematischen Symbole aufdeckten; oder daß sich dadurch die 'eigentlichen Gegenstände' der Mathematik offenbarten (etwa 'logische Gegenstände' in Freges Grundlegung der Arithmetik, oder 'nichts als Mengen' im Falle mengentheoretischer Grundlegungen); daß durch die Ableitung der mathematischen Sätze aus rein Logischem (oder Mengentheoretischem) die eigentliche Grundlage mathematischer Wahrheit oder mathematischer Rechtfertigung ans Licht käme (so Frege gegen Kants Inanspruchnahme der reinen Anschauung nicht nur für die geometrischen, sondern auch für die arithmetischen Sätze); daß sich in all dem die Einheit der Mathematik und ihre logische Einfachheit zeige (so sah es Russell); und daß dadurch die Mathematik am Ende größere 'Sicherheit' gewänne (mit einem Begriff von 'Sicherheit', der seinerseits auf verschiedene Weisen ausbuchstabiert werden kann). Unter den Logizisten besteht Uneinigkeit, welche dieser Ansprüche als die wesentlichen und welche als verfehlt anzusehen sind, und im nachfolgenden Kommentar muß sorgfältig darauf geachtet werden, genau welcher Anspruch es nun gerade ist, den W. jeweils unter die Lupe nimmt und kritisiert. In dieser Hinsicht wäre sicherlich eine systematische Untersuchung der genauen Reichweite der W.schen Kritik wünschenswert, die jedoch im Rahmen eines Kommentars nicht vorgelegt werden kann. Aber der Kommentar kann Ausgangspunkt solch einer Untersuchung sein, und genau in dieser Funktion – eben als Ausgangspunkt weitergehender Untersuchungen dienen zu können – sehe ich, wie schon gesagt, seinen wichtigsten Zweck.

Kein Zweifel kann daran bestehen, daß W.s Untersuchungen in BGM III nicht nur logizistische Grundlegungen betreffen wie diejenigen Freges und Russells, sondern auch mengentheoretische, die mit einer vergleichbaren Vielfalt von Ansprüchen vertreten werden können wie die logizistischen[8], und ich werde im Kommentar häufig mengentheoretische Rückführungen heranziehen, weil sie in ihrer formalen Ausprägung oft einfacher und uns vertrauter sind als die Frege-Russellschen. Zwar

[8] Siehe dazu den erhellenden Überblick in Maddy 1997, Kap. 2, an dem ich mich schon bei der oben angegebenen Liste logizistischer Ansprüche orientiert habe.

werde ich im folgenden häufig nur von "logizistischen Grundlegungen" sprechen, aber die mengentheoretischen sind dann normalerweise mitgemeint. Wichtig ist an dieser Stelle, daß W.s Überlegungen in BGM III, wenn man sie auf Mengenlehre bezieht, nicht eine Kritik an der Mengenlehre als solcher enthalten, sondern nur an mengentheoretischen *Grundlegungs*-Ansprüchen.

Bekanntlich hat W. auch vehemente Kritik an der Mengenlehre selbst geübt, die in diesem Kommentar jedoch keine Rolle spielen wird. Zum Glück – möchte ich sagen. Denn *diese* Kritik W.s ist häufig überzogen, oder zumindest überzogen formuliert, und sie läßt einen Mangel an mathematischem Wissen auf seiner Seite erkennen, der, anders als im Falle der Grundlegungs-Kritik, den Wert seiner Überlegungen beeinträchtigt. W. schreibt häufig so, als sei die Mengenlehre aus einer Art mathematischer Sensationslust entstanden und als hätte sie keine solide handwerkliche Basis, im Sinne des normalen mathematischen Handwerks. In II.21 z.B. bezeichnet er Cantors per Diagonalverfahren geführten Beweis der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen als "prahlerische[n] Beweis", und im darauf folgenden Paragraphen gibt er sich seiner tiefen Abneigung gegen diese Art des Denkens in folgendem Schlußsatz hin: "Ich glaube und hoffe, eine künftige Generation wird über diesen Hokus Pokus lachen." Ähnlich in II.56, wo es vom Cantorschen Satz von der Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen heißt: "Wenn hier das Interesse an dem Satz haftet, der bewiesen wurde, so haftet es an einem Bild, das eine äußerst schwächliche Berechtigung hat, uns aber durch seine Seltsamkeit reizt, wie etwa das Bild von der ›Richtung des Zeitverlaufs‹. Es bewirkt einen leisen Taumel der Gedanken." In dieselbe Kerbe haut eine Äußerung auf S. 17 von VGM, wo W. über Zahlen spricht, "die größer sind als unendlich" (womit er, wenn ich ihn richtig verstehe, überabzählbare Kardinalzahlen meint), und von denen es bei ihm heißt: "Wenn man zeigen kann, daß es Zahlen gibt, die größer sind als unendlich, so schwirrt einem der Kopf. Dies ist vielleicht der Hauptgrund dafür, daß man sie erfunden hat." Dies ist jedoch ganz falsch. Cantors Weg in die Mengenlehre war anfänglich ein mathematisch recht unauffälliger, der sich aus mathematisch naheliegenden Fragen über Fourier-Reihen entwickelte[9], und von einem Streben, uns 'den Kopf schwirren' zu lassen, ist dabei nichts zu spüren. Allerdings hat Cantors Mengenlehre, so wie auch vieles andere in der Mathematik, am Ende das Potential, uns tatsächlich den Kopf schwirren oder uns gedanklich 'taumeln' zu lassen,

[9] Siehe Dauben 1990, Kap. 2: "The Origins of Cantorian Set Theory: Trigonometric Series, Real Numbers, and Derived Sets", und das Kapitel "Genesis der Mengenlehre" in Purkert/Ilgauds 1987.

aber dies sollte nicht als Argument gegen die Respektabilität solcher Überlegungen verwendet werden. Dinge dieser Art gehören eben zur Mathematik.

Auch in BGM III wird hin und wieder ein gewisser Mangel an relevantem mathematischen Wissen deutlich, und W.s weitgehende Konzentration auf die Schriften Freges und Russells verleiht seinen Überlegungen manchmal etwas Antiquiertes. Aber diese Mängel sind, wie sich zeigen wird, in BGM III nicht von großer Bedeutung. Allerdings haben solche Mängel, die für BGM insgesamt charakteristisch sind, sowie das seltsame Zusammenspiel dieser Mängel mit gewissen überzogenen und provozierenden Äußerungen W.s, dazu geführt, daß seine Philosophie der Mathematik in vielen Kreisen einen schlechten Ruf genießt. Es gehört deswegen fast zum guten Ton, in Abhandlungen über diese Philosophie, auch wenn man ihr wohlgesinnt ist, entsprechende abwertende Äußerungen der Kritiker zu zitieren. Ich werde mich an dieser Sitte nicht beteiligen. Weiterhin existieren nicht wenige Darstellungen der W.schen Philosophie der Mathematik, die, ohne (wie es zumindest scheint) mit kritischer Absicht geschrieben zu sein, diese Philosophie doch als so unvernünftig erscheinen lassen, daß sie fast einen noch schlimmeren Eindruck hinterlassen als die ausdrücklich kritisch gemeinten. W.s Äußerungen zur Mathematik enthalten jedoch, auch wenn viele von ihnen beim ersten Lesen schwer genießbar wirken mögen, meistens einen vernünftigen Kern. Jaakko Hintikka, dessen eigenes, szientistisches Philosophieren eigentlich sehr weit von W.s Vorgehen entfernt ist, hat recht, wenn er in seinem in vielerlei Hinsicht Wittgenstein-kritischen Aufsatz "The Original *Sinn* of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" schreibt: "[T]he Wittgensteinian ideas discussed here turn out to have an interesting kernel of truth, as they usually do" (Hintikka 1993, S. 46), und ich stimme mit Peter Hacker überein, wenn er sagt: "Der Teil [der Wittgensteinschen Philosophie], der am wenigsten erforscht wurde, ist die Philosophie der Mathematik. Ich denke, dass in dieser ungeordneten Masse unfertigen Materials geniale Einsichten verborgen sind. Es wäre wirklich lohnend, große Mühe darauf zu verwenden, seine Gedanken auf diesem Gebiet zu verstehen" (Hacker 2002, S. 115).

2. EIGENHEITEN DIESES KOMMENTARS

Trotzdem gibt es zweifellos Gründe, die eine Kommentierung von BGM als fragwürdig erscheinen lassen können. Denn anders als bei den *Philosophischen Untersuchungen* (genauer: dem sogenannten 'Teil I' der PU) handelt es sich bei BGM nicht um einen von W. zur Veröffentlichung vorgesehenen Text. Eine gewisse Ausnahme stellt vielleicht der Text von BGM I dar, der von W. überarbeitet und von Manuskript- in Typoskript-Form gebracht wurde und anfänglich als Teil der PU geplant war.[10] Die restlichen Teile von BGM entstammen jedoch den handschriftlichen Notizen W.s in ihrer Rohform. Hinzu kommt, daß es sich bei BGM um eine von den Herausgebern vorgenommene Auswahl aus diesen Notizen handelt, die nicht nur lückenhaft ist und häufig willkürlich wirkt, sondern manchmal sogar die Reihenfolge der W.schen Eintragungen ändert. So gesehen sind die BGM in nicht unbedeutendem Ausmaß das Produkt der Herausgeber und nicht dasjenige W.s. Und warum sollte man nun solch ein Produkt kommentieren? Aber auch in vollständiger Form und unter Respektierung der bei W. vorfindlichen Reihenfolge handelt es sich bei diesen Notizen mehr um ein Puzzle von Text-Passagen als um ein wirkliches philosophisches 'Werk' (selbst unter Zugrundelegung der liberalsten Anforderungen an das, was man als Werk-Charakter ansehen möchte[11]), und zu allem Überfluß auch noch um ein Puzzle, bei dem einerseits viele Teile fehlen, andererseits aber auch zahlreiche ausgeschieden werden müssen, damit am Ende ein kohärentes Bild seiner Gedankengänge entstehen kann. Soll man so etwas kommentieren?

Es gibt jedoch sehr gute Gründe, beide Fragen – ob BGM, und ob W.s Notizen zur Mathematik überhaupt, kommentiert werden sollen – zu bejahen. Gerade in einer Situation, in der die einen W.s Philosophie der Mathematik geringschätzen, während andere in ihr geniale Einsichten vermuten, sollte durch einen Kommentar, der sich wirklich sowohl auf jede einzelne Passage einläßt als auch den Zusammenhang zwischen den Passagen ernst nimmt, mehr Klarheit erreicht werden, und dies vor allem im Hinblick auf das Buch BGM selbst, auf das sich solche Einstellungen bislang hauptsächlich stützten. Und ich denke, daß der Wert dieses Buches hinreichend deutlich gemacht werden kann. Der nachfolgende Kommentar möchte genau dies für den Teil III zeigen; Kommentare anderer Teile sollen, wie schon im Vorwort gesagt, folgen, und zwar mit derselben Intention: den Wert der W.schen Philosophie der Mathematik sichtbar zu machen.

[10] Siehe die ausführliche Entstehungsgeschichte der PU, die von Joachim Schulte in PUGK, S. 7-47 und 1089-112 erzählt wird und die auch meine Einschränkung auf den 'Teil I' der PU erklärt.

[11] Joachim Schulte hat sich über die Identität philosophischer 'Werke' genauere Gedanken gemacht (Schulte 1999a), die mein Urteil, daß W.s handschriftliche Notizen zur Mathematik jedenfalls keinen Werk-Charakter besitzen, nur bestätigen.

Dabei habe ich immer nur die Philosophie der Mathematik des *späten* W. im Sinn, und wenn in diesem Kommentar von 'Wittgenstein' gesprochen wird, soll, wenn nichts anderes gesagt wird, immer nur der späte Wittgenstein gemeint sein. Für dessen Philosophie ist nun jedoch die Philosophie der Mathematik von besonderer Bedeutung, und ein zweiter wichtiger Grund für das Kommentieren von BGM liegt darin, daß es Licht auf W.s Spätphilosophie insgesamt werfen kann. Ein sehr großer Teil der Texte, die W. seit seinem Wiedereinstieg in die Philosophie im Jahr 1929 bis ins Jahr 1944 verfaßte, handeln von philosophischen Fragen, die die Mathematik betreffen, und er selbst hat 1944 anläßlich einer Kurzbiographie, die John Wisdom über ihn verfassen sollte, veranlaßt, daß zu Wisdoms Text der folgende Schlußsatz hinzugefügt wurde: "Wittgenstein's chief contribution has been in the philosophy of mathematics" (vgl. Monk 1990, S. 467; S. 494 der deutschen Ausgabe). Ich denke, daß sich in W.s Überlegungen zur Mathematik vor allem die charakteristische *Methode* seiner Spätphilosophie besonders deutlich zeigt, und dieser Kommentar wird vor allem auch darauf einen Blick haben.

Er muß weiterhin, um solide Aussagen über den Wert der W.schen Überlegungen zu erlauben, ein sowohl *kritischer* als auch *konstruktiver* Kommentar sein. Mit dem Wort "kritisch" meine ich hier, daß an allen Stellen, an denen W.s Äußerungen beim Leser sofort Einwände hervorrufen, diese Einwände im Kommentar auch gleich artikuliert werden; und der 'konstruktive' Zug wird darin liegen, diese Einwände, zumindest ansatzweise, auch wirklich zu behandeln: entweder durch Verweis auf Stellen, an denen W. selbst auf sie eingeht, oder durch Andeutungen, wie sie von W. im Sinne seiner Spätphilosophie zurückgewiesen werden könnten. Dieses Vorgehen ist in Einklang mit W.s eigener Methode in seiner Spätphilosophie, die sich durch eine, wie ich sie einmal nennen möchte, unablässige *"Aber"-Dialektik* auszeichnet. Er selbst setzt seine Überlegungen ständigen "Aber"s aus, und kaum ein Wort kommt in W.s Spätphilosophie, insbesondere auch in den PU und den BGM, häufiger vor als das Wort "aber". Vor allem dadurch erhält diese Philosophie ihre Tiefe. Bei ihrer Interpretation läuft man jedoch allzu leicht Gefahr, es sich in W.s Denkbahnen bequem zu machen und deren Gefährdungen – durch plausible Alternativ-Sichtweisen, durch innere Inkonsistenzen, durch Blindheit gegenüber relevanten Phänomenen, und anderem mehr – zu vergessen. Dieses Vergessen sollte ein Kommentar verhindern.

Instruktiv ist in dieser Hinsicht eine Passage aus BGM VI:

> Die Sprache, möchte ich sagen, bezieht sich auf eine Lebens*weise*.

Um das Phänomen der Sprache zu beschreiben, muß man eine Praxis beschreiben, nicht einen einmaligen Vorgang, *welcher Art immer er sei*.

Mit diesen Sätzen beginnt VI.34, und zugleich endet damit die S. 335 der BGM. Wer mit W.s Spätphilosophie vertraut ist, wird hier vielleicht mit den Achseln zucken und denken: »Ja, selbstverständlich! Warum sagt er's zum tausendsten Mal?« Umso größer dann die Verblüffung, wenn man umblättert und W.s unmittelbare Fortsetzung auf S. 336 liest: "Das ist eine sehr schwierige Erkenntnis." Diese Passage wurde von W. *nach* 1940 niedergeschrieben (vermutlich in den Jahren 1941 bis 1944; eine genauere Datierung ist mir nicht bekannt), also zu einer Zeit, als ihm jene Erkenntnis schon höchst vertraut gewesen sein muß. Trotzdem hat er das Gefährdete und Schwierige seiner Sichtweise nicht vergessen, und ein Kommentar seiner Texte sollte die Bewußtheit davon immer wachhalten, also in diesem Sinn 'kritisch' sein.

W.s "Aber"-Dialektik kann leicht falsch verstanden werden. In dem schon erwähnten Aufsatz "The Original *Sinn* of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" begreift Hintikka sie als "defensiv" und beklagt "Wittgenstein's obsessive preoccupation with the details of apparent counter-examples to his views", worin Hintikka eine Art von Paranoia diagnostiziert (Hintikka 1993, S. 50f.). Dies ist jedoch ein sozusagen bürgerliches Mißverständnis, weil Hintikka unterstellt, W. hätte das (zumindest in der angelsächsischen Philosophie) übliche "your view, my view"-Spiel mitspielen wollen. Davon kann jedoch, wie sich gleich zeigen wird, keine Rede sein.

Hintikka beendet seinen Aufsatz mit der Aussage: "I cannot help thinking that [Wittgenstein's] insecurity is truly the original sin of Wittgenstein's philosophy of mathematics" (Hintikka 1993, S. 51), und Hintikka hat damit insofern recht, als W. tatsächlich manchmal geradezu dramatisch klingende Zeichen von Unsicherheit zeigt. Besonders anrührend ist folgende Notiz aus dem den §§ 59-90 von BGM III zugrunde liegenden MS 117, welche sich zwischen den Textpassagen findet, die als § 78 und § 79 in BGM III eingegangen sind, und in der sich W. in einer kafkaesken Litanei von Klagen über den Mangel an Überblick ergeht, mit dem er in seiner Philosophie der Mathematik zu kämpfen hat:

Der Ausdruck der philosophischen Konfusion: Wir wissen nicht, was wir darüber sagen sollen.

Ich weiß nicht, welche Ordnung ich den Begriffen geben soll [Variante: "wie ich die Dinge zusammenstellen soll"]. Ich weiß etwa nicht ob ich den Beweis unter die Experimente, die Mathematik unter die Spiele, die Widersprüche unter die Verwirrungen rechnen soll. Ob ich sagen soll, zwischen mathematischen und experimentellen Wahrheiten bestehe ein Unterschied des Grades, ob ich sagen soll ein neuer Beweis gebe dem Satz einen neuen Sinn.

Ich kenne mich in den menschlichen Tätigkeiten, den Techniken des Gebrauchs der Wörter, der mathematischen Sätze, der Beweise nicht aus. Wenn ich sie beschreiben soll, so kann ich sie in keinem Sinne übersehen.

Es ist, wie wenn ich ein winziges Gesichtsfeld und ein schlechtes Gedächtnis hätte, und mich nun, durch hin und her blicken auf einer *großen* Landkarte auszukennen lernen sollte.

Man würde in so einem Falle fortwährend Zusammenhänge vergessen, verkennen, sie langwierig suchen, wo sie nicht sind. (MS 117, S. 220f.)

Dieser Ausdruck höchster Unsicherheit ist tatsächlich bemerkenswert. Hintikkas bürgerliche Deutung W.scher Unsicherheits-Zeichen (wobei ich nicht weiß, ob Hintikka die soeben zitierte Passage überhaupt kannte) führt jedoch in die Irre. Wie ein strenger, wenn auch wohlwollender Erzieher schreibt Hintikka, gegen W. gewandt: "If you are really confident of your views, you do not worry about their apparently been contradicted by others" (Hintikka 1993, S. 51). Aber W. denkt nicht in dieser Weise. In zahlreichen Äußerungen hat er zu erkennen gegeben, daß er gerade *keine* 'views', im Sinne von Thesen oder Meinungen (und in diesem Sinn gebraucht Hintikka das Wort "view"), vertreten möchte, die dann anderen Leuten gegenüber verteidigt werden müßten. Die sozusagen offizielle Verlautbarung stellt PU § 128 dar: "Wollte man *Thesen* in der Philosophie aufstellen, es könnte nie über sie zur Diskussion kommen, weil Alle mit ihnen einverstanden wären" (wobei W. hier mit "Philosophie" natürlich seine eigene meint). Noch aufschlußreicher ist eine Äußerung in VGM, in der W. auf die Bemerkung »Ich weiß schon, wovon Sie gerne hätten, daß ich's sage«, die Casimir Lewy, ein Teilnehmer seiner Vorlesung, gemacht hatte, mit folgender Klarstellung reagiert:

Diese Kritik an mir war sehr hart, denn ich habe kein Recht dazu, bestimmte Aussagen von Ihnen zu verlangen, außer einer: »Schauen wir einmal nach!« – Man kann keine allgemeine Formulierung aufstellen und sagen, ich hätte das Recht, diese Aussage von Ihnen zu verlangen. Denn was könnte diese allgemeine Formulierung sein? Meine Meinung etwa? Aber offensichtlich besteht der ganze Witz [meiner Philosophie] gerade darin, daß ich keine Meinung haben darf.

Die einzige Aussage, die ich von Ihnen verlangen darf, lautet: »Untersuchen wir einmal, ob dies und jenes wirklich der Fall ist.« (VGM, S. 63)

W.s 'Unsicherheit', wenn man dieses Wort angesichts solcher Aussagen überhaupt noch benutzen möchte, rührt nicht daher, daß er sich von kritischen Gegenmeinungen anderer umstellt fühlte; sie wird vielmehr erzeugt durch die Komplexität der mathematischen Sprachspiele, durch die uns nicht klar vor Augen stehende Grammatik der mathematischen Sätze, die er, wie in VII.16 gesagt, klarlegen möchte. Dazu bedient er sich der Methode, viele Stimmen, mit vielen "Aber"s, auftreten zu lassen, um der Vielschichtigkeit unserer Praxis und unseres Denkens gerecht zu werden. Oft sprechen philosophische Partner, die Einwände vorbringen; dann wieder solche, die die verschiedenartigsten philosophischen Vorurteile präsentieren, zu denen wir alle neigen; manchmal wird nur an völlig Vertrautes erinnert; manchmal spricht jemand vom Standpunkt der Fremde oder gar 'vom Mars' (siehe Z § 711); und dann spricht W. selbst, um sich und uns aus den philosophischen Verwirrungen zu lösen. Es gibt in der Geschichte der Philosophie kaum einen Text-Korpus mit vergleichbarer Vielstimmigkeit. Darin eine Form von Paranoia zu sehen, ist ein tiefes Mißverständnis.

An dieser Stelle muß W. also verteidigt werden, an anderen Stellen jedoch kann ich mich zu einer Verteidigung nicht bringen, da ich einige der W.schen Sympathien und Antipathien nicht teile. Seine übermäßige Sympathie für das Rechnerische in der Mathematik zum Beispiel ist inakzeptabel, jedenfalls dann, wenn sie sich in maßlosen Äußerungen wie der folgenden niederschlägt: "In der Mathematik ist *alles* Algorithmus, *nichts* Bedeutung; auch dort, wo es so scheint, weil wir mit *Worten über* die mathematischen Dinge zu sprechen scheinen. Vielmehr bilden wir dann eben mit diesen Worten einen Algorithmus." (BT, S. 748f.; PG, S. 468) W.s Position erinnert in dieser Hinsicht an diejenige Kroneckers (dies wird auch in Marion 1998, S. 1-9, festgestellt), und wie Kronecker überläßt sich auch W. manchmal einer merkwürdig hemmungslosen Antipathie gegenüber dem das Rechnerische übersteigenden, begrifflichen Vorgehen Cantors und Dedekinds. Ich empfinde diesen engherzigen Zug in W.s Denken als bedauerlich, vor allem deshalb, weil er der tatsächlichen mathematischen Praxis, die W. ja eigentlich respektieren wollte, und insbesondere der heutigen mathematischen Praxis, völlig widerspricht.[12] Ich denke jedoch, daß W.s Methode, von der gleich noch eingehender die Rede sein wird, diese Art von Engherzigkeit keinesfalls erzwingt und daß sie, im Gegenteil, sehr gut dazu geeignet ist, auch der begrifflichen Praxis eines Cantor oder Dedekind und der heutigen Mathematik gerecht

[12] Es gibt allerdings auch heute Mathematiker, die die bestehende Praxis durch eine rechnerische ersetzen wollen. Der wichtigste unter ihnen ist Doron Zeilberger; siehe die Kolumne http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/OPINIONS.html im Internet. (Interessanterweise stellt Zeilberger seiner Kolumne als Motto den Ausspruch eines gewissen Charles McCabe voran, der als krasse Antithese zur Einstellung W.s gelesen werden kann: "Any clod can have the facts, but having opinions is an art.")

zu werden. Der vorliegende Kommentar wird auch in der Hinsicht kritisch und zugleich konstruktiv sein, als ich W.s Algorithmenfixiertheit nicht übernehme und an entsprechenden Stellen auf W.sche Möglichkeiten zu ihrer Überwindung hinweise.

Die soeben zitierte Äußerung über das allumfassend Algorithmische der Mathematik ist ein typisches Produkt aus W.s sogenannter 'mittlerer Periode'. Man kann die Frage stellen, ob einer Kommentierung von Texten des späten W. nicht eine Kommentierung relevanter Texte des mittleren W., ja vielleicht auch des frühen, vorangehen müßte, vor allem dann, wenn, wie bei seiner Philosophie der Mathematik, kein sozusagen kanonischer Text vorliegt, wie dies bei der Sprachphilosophie und (in gewissem Maße) der Philosophie des Geistes mit den *Philosophischen Untersuchungen* der Fall ist. Diese Frage kann jedoch guten Gewissens verneint werden, wenn man, wie im vorliegenden Kommentar, vor allem den soliden Wert der W.schen Gedanken sichtbar machen möchte. Wer W.s Philosophie der Mathematik hauptsächlich als Kuriosum ansieht, als ein besonders exotisches Exemplar im Zoo philosophischer Entwürfe, wird in der frühen und mittleren Phase ohne Zweifel auf seine Kosten kommen, aber es erscheint mir zum Zwecke einer Verteidigung der reifen Philosophie der Mathematik W.s, wie ich sie anstrebe, wenig günstig, in dieser Weise vorzugehen. Die Spätphilosophie W.s soll hier für sich sprechen.

Dies heißt nicht, daß nicht trotzdem Bezüge zur *Tractatus*-Philosophie und insbesondere zu Gedanken aus der mittleren Phase hergestellt werden, wenn sich dies zum Verständnis der Spätphilosophie als nützlich erweist. Sowieso halte ich, wie auch Wolfgang Kienzler in seinem Buch *Wittgensteins Wende zu seiner Spätphilosophie, 1930-1932*, W.s mittlere Phase für eine Übergangsphase, die schon deutlich auf die Spätphilosophie ausgerichtet ist. Sie enthält Überlegungen und Formulierungen, die man, mit hinreichender Umsicht interpretiert, zur Spätphilosophie rechnen kann und aufgrund ihrer Prägnanz und Frische dort auch nicht missen möchte. Mit anderen Worten: Ich betrachte im folgenden Wittgensteins mittlere Phase ausschließlich als Weg zur Spätphilosophie, wodurch es mir gerechtfertigt erscheint, beide Phasen in gewisser Weise als eine Einheit zu behandeln. Dies hat nicht nur den sachlichen Vorteil, das Gute aus der mittleren Phase frei verwenden und das Schlechte ausscheiden zu können, sondern auch den Wittgenstein-exegetischen, sich nicht um die Frage nach der genauen zeitlichen Erstreckung dieser Phase – ob von 1929 bis 1932 (Kienzler 1997) oder bis 1933 (Frascolla 1994) oder bis 1936 (Schulte 1999) reichend – kümmern zu müssen. Diese Frage ist dann unwichtig.

3. WITTGENSTEINS PHILOSOPHISCHE METHODE

Jene Einheit der mittleren und späten Phase wird vor allem durch W.s Orientierung an einer neuen und ganz eigentümlichen philosophischen Methode konstituiert, über die nun einiges zu sagen ist.[13] Der gegenüber der *Tractatus*-Philosophie wichtigste Zug des neuen Methoden-Ideals W.s liegt in dessen ausdrücklich undogmatischem Charakter, und man kann die mittlere Phase als ein allmähliches Sich-herausarbeiten aus dem Dogmatismus des *Tractatus* begreifen. Dies erklärt gewisse maßlose Äußerungen jener Phase: in ihrem Fall ist der Dogmatismus noch wirksam; und zugleich die vielen vernünftigen: der Dogmatismus ist überwunden. W. selbst hat sein neues, sich vom *Tractatus* lösendes Philosophieren in genau dieser Weise charakterisiert, und zwar in einer wunderbaren Äußerung vom 9. Dezember 1931 vor Mitgliedern des Wiener Kreises, die in WWK unter der Überschrift "ÜBER DOGMATISMUS" veröffentlicht wurde (WWK, S. 182-186). Es lohnt sich, deren Ende zu zitieren:

> Den Unterschied zwischen einem dogmatischen und einem undogmatischen Verfahren möchte ich durch ein Beispiel andeuten. Ich rede zuerst dogmatisch und werde dann undogmatisch sprechen. Ich sage also: Wird ein Satz auf zwei verschiedene Arten verifiziert, so hat er in beiden Fällen einen verschiedenen Sinn. Das klingt noch immer merkwürdig und kann zu Widerspruch Anlaß geben. Denn es könnte jemand sagen: Ich sehe gar nicht ein, warum der Satz dann einen verschiedenen Sinn haben soll und warum nicht derselbe Satz auf zwei ganz verschiedene Arten verifiziert werden kann. Nun drücke ich mich aber

[13] Viel ausführlichere Informationen über die philosophische Methode des späten W. finden sich in Baker und Hackers Kommentar der *Philosophischen Untersuchungen*, insbesondere in Baker/Hacker 2005a, Kap. XIV und XV, und Baker/Hacker 2005b, Kap. 4. – Wer mittlere und späte Phase nicht als von einer durchgängigen Methode beherrscht ansieht, wird dazu neigen, die mittlere als eine eigenständige Phase zu behandeln; so ganz ausdrücklich Schulte, der sie als "eigenständiges Gedankengebäude" bezeichnet (Schulte 1999, S. 44). Als solch ein Gebäude erscheint sie auch in Frascolla 1994 und in Marion 1998. Meine Gründe, ihr diese Eigenständigkeit abzusprechen, beruhen hauptsächlich auf meiner Betonung der W.schen Methode. Wenn zum Beispiel Frascolla in seinem Kapitel 2, das den Titel trägt: "Verificationism and Its Limits: The intermediate phase (1929-33)", den Verifikationismus als wesentliches Merkmal der mittleren Phase anführt, das sie deutlich von der späten unterscheide, ist es ein Leichtes, auf die methoden-orientierte Passage in WWK, S. 186, hinzuweisen, die ich gleich zitieren werde und die eine ganz andere Sprache spricht. Dort wird der Verifikationismus, wenn er, wie in Frascollas Buch, in Form einer strittigen These auftritt, als dogmatisch zurückgewiesen – gerade so, wie dies eben auch in der reifen Spätphilosophie geschieht.

undogmatisch aus und mache einfach auf folgendes aufmerksam: Die Verifikation eines Satzes ist ja wieder nur durch eine Beschreibung gegeben. Der Tatbestand ist also der: Wir haben zwei Sätze. Der zweite Satz beschreibt die Verifikation des ersten Satzes. Was tue ich also? Ich stelle einfach als Regel der Grammatik auf, daß der erste Satz aus dem zweiten folgen soll. Ich spreche also gar nicht von Sinn und was der Sinn ist, sondern ich bleibe ganz innerhalb der Grammatik. Wenn man nun sagt: Ein Satz hat zwei verschiedene Verifikationen, so mache ich darauf aufmerksam: Diese Verifikationen werden durch verschiedene Sätze beschrieben; wir sind also, wenn wir denselben Satz ableiten, *nach verschiedenen Regeln vorgegangen; und mehr wollte ich nicht sagen*.

Ich mache also den andern nur darauf aufmerksam, was er eigentlich tut, und enthalte mich einer jeden Behauptung. Alles muß sich dann in der Grammatik abspielen.

Es handelt sich darum, wesentliche, grundsätzliche Unterscheidungen zu machen. (WWK, S. 186)

Der Ausdruck "in der Grammatik abspielen" bedeutet hier, daß wir diejenigen Folgerungen zwischen den Sätzen ziehen, wie sie uns, als kompetente Sprecher, natürlich und selbstverständlich erscheinen; und W. will also lediglich auf dasjenige *aufmerksam* machen, was uns da natürlich und selbstverständlich ist; er will lediglich dies beschreiben. – So spricht typischerweise der späte W., der, wie wir nun sehen, also auch schon in der mittleren Phase vollkommen präsent ist. Und umgekehrt bleibt der Kampf gegen den Dogmatismus, der für die mittlere Phase so wichtig ist, selbst bis in die spätesten Überlegungen W.s spürbar; etwa in ÜG § 321, niedergeschrieben am 12. März 1951, also sechs Wochen vor seinem Tod, wo W. sich nach einer allzu ambitionierten, weil zu allgemein formulierten Äußerung selbst ermahnt: "Es klingt eben zu sehr nach der *Log. Phil. Abh.*" – eben nach dem Dogmatismus des *Tractatus*[14], dessen Überwindung für W. eine Lebensaufgabe darstellte.

Der Kern seiner neuen, undogmatischen Methode liegt, erstens, in dem Bestreben, keine strittigen Thesen aufzustellen, die irgendeine 'Meinung' ausdrückten, sondern nur zu 'untersuchen, ob dies und jenes wirklich der Fall ist' (wie wir in der oben zitierten Passage aus VGM, S. 63, schon gehört haben); und, zweitens, in der Idee, daß sich diese Untersuchung auf Charakteristika unseres normalen Sprachgebrauchs richten müsse. Dieser Sprachgebrauch muß dann nur noch beschrieben werden. In seinem *Blauen Buch*, in dem W. im Jahr 1934 erstmals seine neue Art des Philosophierens der Öffentlichkeit zugänglich machen wollte, heißt

[14] Der schicke Name "Tractatus logico-philosophicus" ist eine Erfindung George Edward Moores. W. selbst nannte sein erstes Buch immer nur, wie auch ursprünglich von ihm vorgesehen, "Logisch-philosophische Abhandlung". Ich werde jedoch beim Namen "Tractatus" (ohne "logico-philosophicus") bleiben.